# El Teorema Fundamental del Cálculo

Departamento de Análise Matemática
Facultade de Matemáticas
Universidade de Santiago de Compostela

Santiago, 2011

Recordemos que $f$ es integrable en $I = [a, b]$ y su integral en $I$ vale $A \in \mathbb{R}$ si se cumplen las dos siguientes definiciones (equivalentes):

1. $$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = A.$$

2. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(I)$ cumple $\|P\| < \delta$ entonces $|S(f; P) - A| < \varepsilon$ para cualquier elección de puntos intermedios.

Recordemos que $f$ es integrable en $I = [a, b]$ y su integral en $I$ vale $A \in \mathbb{R}$ si se cumplen las dos siguientes definiciones (equivalentes):

1. $$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = A.$$
2. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(I)$ cumple $\|P\| < \delta$ entonces $|S(f; P) - A| < \varepsilon$ para cualquier elección de puntos intermedios.

¿De dónde sale la **Regla de Barrow**?

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{si } F' = f \text{ en } I \text{ y } f \text{ continua en } I.$$

# Un problema técnico

## Tiene que ver con la aditividad con respecto al intervalo de integración

Recordemos que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ **se define**

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

# Un problema técnico

## Tiene que ver con la aditividad con respecto al intervalo de integración



Recordemos que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ **se define**

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Problema.** Demuestra que si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $I$ entonces para cualesquiera $x, y, z \in I$ se tiene que

$$\int_x^y f(s)\,ds - \int_x^z f(s)\,ds = \int_z^y f(s)\,ds.$$

# La función integral indefinida



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $I$.

**Definición.** *Una* **integral indefinida de** $f$ *es cualquier función de la forma*

$$F : x \in I \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds,$$

*donde $x_0 \in I$ está fijado de antemano.*

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $I$.

**Definición.** *Una* **integral indefinida de** $f$ *es cualquier función de la forma*

$$F : x \in I \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds,$$

*donde $x_0 \in I$ está fijado de antemano.*

**Teorema.** *En las condiciones de la definición anterior, la función $F$ es lipschitziana en $I$ (y, por tanto, continua en $I$).*

**Teorema Fundamental del Cálculo.**
*Sean* $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable en* $I$, $x_0 \in I$, *y la función integral indefinida*

$$F : x \in I \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds.$$

*Si* $f$ *es continua en un punto* $c \in I$ *entonces* $F$ *es derivable en* $c$ *y* $F'(c) = f(c)$.

**Teorema Fundamental del Cálculo.**
*Sean $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $I$, $x_0 \in I$, y la función integral indefinida*

$$F : x \in I \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds.$$

*Si $f$ es continua en un punto $c \in I$ entonces $F$ es derivable en $c$ y $F'(c) = f(c)$.*

**Nota.** Si $c$ es un extremo del intervalo se entiende que $F'$ es la correspondiente derivada lateral.

**Corolario (Existencia de primitivas para las funciones continuas).** *Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en un intervalo $J$ (no necesariamente cerrado o acotado), entonces para cualquier $x_0 \in J$ fijado la función integral indefinida*

$$F : x \in J \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds,$$

*es una primitiva de $f$ (es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in J$). Además, cualquier otra primitiva de $f$ es de la forma $G(x) = F(x) + k$ para todo $x \in J$ y para un cierto valor $k \in \mathbb{R}$.*

**Corolario (Existencia de primitivas para las funciones continuas).** *Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en un intervalo $J$ (no necesariamente cerrado o acotado), entonces para cualquier $x_0 \in J$ fijado la función integral indefinida*

$$F : x \in J \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds,$$

*es una primitiva de $f$ (es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in J$). Además, cualquier otra primitiva de $f$ es de la forma $G(x) = F(x) + k$ para todo $x \in J$ y para un cierto valor $k \in \mathbb{R}$.*

**Corolario (Regla de Barrow).** *Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $I$ y $F$ es una primitiva de $f$ entonces*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

# Dos corolarios importantes

## Notas sobre la existencia de primitivas para las funciones continuas



1. El primer corolario no solo asegura la existencia de primitivas para las funciones continuas, sino que también nos dice cómo son:

1. El primer corolario no solo asegura la existencia de primitivas para las funciones continuas, sino que también nos dice cómo son: si $f$ es continua en el intervalo $J$ entonces todas sus primitivas son de la forma

$$F(x) = k + \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds \quad (x \in J), \text{ con } x_0 \in J \text{ y } k \in \mathbb{R} \text{ fijados.}$$

1. El primer corolario no solo asegura la existencia de primitivas para las funciones continuas, sino que también nos dice cómo son: si $f$ es continua en el intervalo $J$ entonces todas sus primitivas son de la forma

$$F(x) = k + \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds \quad (x \in J), \text{ con } x_0 \in J \text{ y } k \in \mathbb{R} \text{ fijados.}$$

2. No siempre las funciones elementales tienen primitivas elementales.

1. El primer corolario no solo asegura la existencia de primitivas para las funciones continuas, sino que también nos dice cómo son: si $f$ es continua en el intervalo $J$ entonces todas sus primitivas son de la forma

$$F(x) = k + \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \quad (x \in J), \text{con } x_0 \in J \text{ y } k \in \mathbb{R} \text{ fijados.}$$

2. No siempre las funciones elementales tienen primitivas elementales. Por ejemplo, $F(x) = \int_0^x e^{-s^2}\,ds$ es una primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$, pero $F$ no se puede expresar en términos de funciones elementales.

1. El primer corolario no solo asegura la existencia de primitivas para las funciones continuas, sino que también nos dice cómo son: si $f$ es continua en el intervalo $J$ entonces todas sus primitivas son de la forma

$$F(x) = k + \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \quad (x \in J), \text{ con } x_0 \in J \text{ y } k \in \mathbb{R} \text{ fijados.}$$

2. No siempre las funciones elementales tienen primitivas elementales. Por ejemplo, $F(x) = \int_0^x e^{-s^2}\,ds$ es una primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$, pero $F$ no se puede expresar en términos de funciones elementales.
3. Las funciones discontinuas pueden tener primitivas o no **¿Ejemplo de cada una?**

1. En ocasiones podemos usar la Regla de Barrow aunque en principio no se cumplan sus hipótesis.

1. En ocasiones podemos usar la Regla de Barrow aunque en principio no se cumplan sus hipótesis. Por ejemplo, cuando tenemos una cantidad finita de discontinuidades, todas ellas evitables

1. En ocasiones podemos usar la Regla de Barrow aunque en principio no se cumplan sus hipótesis. Por ejemplo, cuando tenemos una cantidad finita de discontinuidades, todas ellas evitables; en el cálculo de integrales de funciones continuas a trozos quizá podamos aplicar la Regla de Barrow al calcular la integral en cada trozo.

1. En ocasiones podemos usar la Regla de Barrow aunque en principio no se cumplan sus hipótesis. Por ejemplo, cuando tenemos una cantidad finita de discontinuidades, todas ellas evitables; en el cálculo de integrales de funciones continuas a trozos quizá podamos aplicar la Regla de Barrow al calcular la integral en cada trozo.
2. Existe una versión más general de la Regla de Barrow. **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**. *Si* $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es* **integrable** *en* $I$ *y* $F$ *es una primitiva de* $f$, *entonces* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

1. En ocasiones podemos usar la Regla de Barrow aunque en principio no se cumplan sus hipótesis. Por ejemplo, cuando tenemos una cantidad finita de discontinuidades, todas ellas evitables; en el cálculo de integrales de funciones continuas a trozos quizá podamos aplicar la Regla de Barrow al calcular la integral en cada trozo.
2. Existe una versión más general de la Regla de Barrow. **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**. *Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es* **integrable** *en $I$ y $F$ es una primitiva de $f$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.*
**Ejercicio**. Encuentra un ejemplo de una función $f$ que satisfaga las condiciones del Segundo Teorema Fundamental y no las de la Regla de Barrow.

# Derivación de funciones integrales

## Esto es otra consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo



Nos planteamos ahora cómo calcular derivadas de funciones del tipo

$$x \longmapsto \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\, ds.$$

Nos planteamos ahora cómo calcular derivadas de funciones del tipo

$$x \longmapsto \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\, ds.$$

**Proposición.** *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo $I$, $g, h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ son derivables en el intervalo $J$ y $g(x), h(x) \in I$ para todo $x \in J$, entonces para todo $x \in J$ tenemos que*

$$\left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\, ds \right)' = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

# Derivación de funciones integrales

## Esto es otra consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo



Nos planteamos ahora cómo calcular derivadas de funciones del tipo

$$x \longmapsto \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\, ds.$$

**Proposición.** *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo $I$, $g, h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ son derivables en el intervalo $J$ y $g(x), h(x) \in I$ para todo $x \in J$, entonces para todo $x \in J$ tenemos que*

$$\left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\, ds \right)' = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

**Ejemplo.** Calcula la derivada de la función

$$G(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} e^{-s^2}\, ds \quad (x \in \mathbb{R}).$$

# Cambio de variable en la integral definida

## ¡No será necesario deshacer los cambios de variable!





**Teorema de Cambio de Variable en la integral definida.**
*La fórmula de cambio de variable*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt$$

*es válida si* $G : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continuamente derivable en* $I$ *y* $f$ *es integrable en* $G(I)$.

**Teorema de Cambio de Variable en la integral definida.** *La fórmula de cambio de variable*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt$$

*es válida si* $G : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continuamente derivable en* $I$ *y* $f$ *es integrable en* $G(I)$.

**Nota para recordar la fórmula.** En la primera integral hacemos $x = G(t)$, de donde $dx = G'(t)\,dt$.

El Teorema Fundamental

Introducción
Un problema técnico
El Teorema Fundamental
Dos corolarios importantes
Derivación de funciones integrales
El Teorema de Cambio de Variable
Integración por partes

**Teorema de Cambio de Variable en la integral definida.**
*La fórmula de cambio de variable*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt$$

*es válida si* $G : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continuamente derivable en* $I$ *y* $f$ *es integrable en* $G(I)$.

**Nota para recordar la fórmula.** En la primera integral hacemos $x = G(t)$, de donde $dx = G'(t)\,dt$.

Solamente lo demostraremos en el caso "$f$ continua".

# Cambio de variable en la integral definida

## ¡No será necesario deshacer los cambios de variable!



**Teorema de Cambio de Variable en la integral definida.** *La fórmula de cambio de variable*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt$$

*es válida si $G : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continuamente derivable en $I$ y $f$ es integrable en $G(I)$.*

**Nota para recordar la fórmula.** En la primera integral hacemos $x = G(t)$, de donde $dx = G'(t)\,dt$.

Solamente lo demostraremos en el caso "$f$ continua".

Al contrario que el en Teorema de Cambio de Variable para el cálculo de primitivas, **la función de cambio de variable $G$ no necesita ser inyectiva**.

**Cómo usar el cambio de variable en la integral definida.**

$$\underbrace{\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx}_{(I)} = \underbrace{\int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt}_{(II)}.$$

**Cómo usar el cambio de variable en la integral definida.**

$$\underbrace{\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx}_{(I)} = \underbrace{\int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt}_{(II)}.$$

**Ejemplo del Caso Fácil (Partimos de la integral (II), por lo que la función de cambio $G$ y su dominio se encuentran entre los datos del problema.)**

(a) Calcula la $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} t}\cos t\,dt$.

(b) Calcula la $\int \sqrt{\operatorname{sen} t}\cos t\,dt$.

**Cómo usar el cambio de variable en la integral definida.**

$$\underbrace{\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx}_{(I)} = \underbrace{\int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt.}_{(II)}$$

**Cómo usar el cambio de variable en la integral definida.**

$$\underbrace{\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx}_{(I)} = \underbrace{\int_a^b f(G(t))\,G'(t)\,dt.}_{(II)}$$

**Ejemplo del Caso NO TAN Fácil (Partimos de la integral (I), por lo que la función de cambio $G$ NO se encuentra entre los datos del problema.)**

(a) Calcula la $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

(b) Calcula la $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

(c) Repite el apartado (a) usando la misma función de cambio pero con dominio en $[-\pi/2, \pi/2 + 2\pi]$.

**Segunda versión del Teorema de Cambio de Variable.**
*La fórmula de cambio de variable*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,(G^{-1})'(x)\,dx = \int_a^b f(G(t))\,dt$$

*es válida si* $G : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continuamente derivable en* $I$, $G'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$, *y* $f$ *es integrable en* $G(I)$.
**Ejemplo.** Calcular

$$\int_{(\pi/2)^2}^{\pi^2} \cos\sqrt{t}\,dt.$$

**Teorema de integración por partes en la integral definida.**
*Si $f, g : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuamente derivables en $I$ entonces*

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

**Teorema de integración por partes en la integral definida.**
*Si $f, g : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuamente derivables en $I$ entonces*

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

**Abreviatura de la fórmula:**

$$\int_a^b u\, dv = u\, v\big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

# Integración por partes en la integral definida



**Teorema de integración por partes en la integral definida.**
*Si $f, g : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuamente derivables en $I$ entonces*

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

**Abreviatura de la fórmula:**

$$\int_a^b u\, dv = u\, v\big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

**Ejemplo.** $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\, dx.$