Propiedades básicas de la integral de Riemann

Departamento de Análise Matemática
Facultade de Matemáticas
Universidade de Santiago de Compostela

Santiago, 2011

Esquema

Objetivos del tema:

Esquema

Objetivos del tema:

1) Profundizar en la relación integrabilidad/continuidad.

Esquema

Objetivos del tema:

1) Profundizar en la relación integrabilidad/continuidad.

2) Teoremas del valor medio del cálculo integral.

Integrabilidad y continuidad

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en I.

Problema. Si cambiamos los valores de f en un conjunto finito de puntos de I ¿la nueva función es integrable en I? Si lo es ¿qué relación hay entre las integrales de ambas funciones?

Integrabilidad y continuidad

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en I.

Problema. Si cambiamos los valores de f en un conjunto finito de puntos de I ¿la nueva función es integrable en I? Si lo es ¿qué relación hay entre las integrales de ambas funciones?

Para responder con claridad llamemos g a la función modificada y notemos que

$$g - f \text{ es una función enjambre.}$$

Integrabilidad y continuidad

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en I.

Problema. Si cambiamos los valores de f en un conjunto finito de puntos de I ¿la nueva función es integrable en I? Si lo es ¿qué relación hay entre las integrales de ambas funciones?

Para responder con claridad llamemos g a la función modificada y notemos que

$$g - f \text{ es una función enjambre.}$$

Por lo tanto, $g = f + (g - f)$ es integrable en I, por ser suma de integrables, Sea $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en I.

Problema. Si cambiamos los valores de f en un conjunto finito de puntos de I ¿la nueva función es integrable en I? Si lo es ¿qué relación hay entre las integrales de ambas funciones?

Para responder con claridad llamemos g a la función modificada y notemos que

$$g - f \text{ es una función enjambre.}$$

Por lo tanto, $g = f + (g - f)$ es integrable en I, por ser suma de integrables, y

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx}_{=0} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Integrabilidad y continuidad

Conclusión. Si una función integrable se modifica en un conjunto finito de puntos entonces la nueva función es integrable y su integral coincide con la de la función de partida.

Integrabilidad y continuidad

Conclusión. Si una función integrable se modifica en un conjunto finito de puntos entonces la nueva función es integrable y su integral coincide con la de la función de partida.

Aplicación. Las funciones continuas a trozos con discontinuidades de salto finito o evitables son integrables en intervalos compactos.

Conclusión. Si una función integrable se modifica en un conjunto finito de puntos entonces la nueva función es integrable y su integral coincide con la de la función de partida.

Aplicación. Las funciones continuas a trozos con discontinuidades de salto finito o evitables son integrables en intervalos compactos.

¿Qué sucede si las discontinuidades no son del tipo anterior?
¿Qué sucede si tenemos infinitos puntos de discontinuidad?

Definición. *Un conjunto* $N \subset \mathbb{R}$ *es de* **medida cero** *cuando para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una familia de intervalos* $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$N \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Definición. *Un conjunto* $N \subset \mathbb{R}$ *es de* **medida cero** *cuando para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una familia de intervalos* $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$N \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Por ejemplo, todo conjunto numerable es de medida cero

Propiedades de la integral

Introducción

Integrabilidad y continuidad

Teoremas del valor medio

Definición. *Un conjunto $N \subset \mathbb{R}$ es de* **medida cero** *cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia de intervalos $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$N \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Por ejemplo, todo conjunto numerable es de medida cero (aunque no todo conjunto de medida cero es numerable).

Propiedades de la integral

Introducción

Integrabilidad y continuidad

Teoremas del valor medio

Definición. *Un conjunto $N \subset \mathbb{R}$ es de* **medida cero** *cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia de intervalos $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$N \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Por ejemplo, todo conjunto numerable es de medida cero (aunque no todo conjunto de medida cero es numerable).

Teorema de Lebesgue. *Para que una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sea integrable en I es necesario y suficiente que el conjunto de puntos de discontinuidad de f sea de medida cero.*

Teoremas del valor medio del cálculo integral

Teorema del valor medio para funciones integrables.
Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es integrable en* I *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = y\,(b-a)$$

para un único $y \in [\inf\{f(x) \,:\, x \in I\}, \sup\{f(x) \,:\, x \in I\}]$.

Teorema del valor medio para funciones continuas.
Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* I *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

para al menos un $c \in [a, b]$.