Otra definición de la integral de Riemann (Esto forma parte del Tema 1)

Departmento de Análise Matemática

Facultade de Matemáticas

Universidade de Santiago de Compostela

Santiago, 2011

Esquema

Objetivo del tema:

Esquema

Objetivo del tema:
1) Presentar una **tercera** (y última) definición de la integral de Riemann.

Esquema

Objetivo del tema:
1) Presentar una **tercera** (y última) definición de la integral de Riemann.

Necesitaremos estudiar un poco más sobre particiones y sumas inferiores y superiores.

Más sobre particiones

Definición. *Sean P y Q dos particiones del mismo intervalo compacto $[a, b]$.*
Diremos que Q es **más fina** *que P cuando $P \subset Q$.*

Más sobre particiones

Definición. *Sean P y Q dos particiones del mismo intervalo compacto $[a, b]$.*
Diremos que Q es **más fina** *que P cuando $P \subset Q$.*

Ejemplo. $P = \{0, 1/2, 1\}$ y $Q = \{0, 1/2, 2/3, 1\}$ son particiones de $[0, 1]$ y

$$Q \text{ es más fina que } P.$$

Más sobre particiones

Definición. *Sean P y Q dos particiones del mismo intervalo compacto $[a,b]$.*
Diremos que Q es **más fina** *que P cuando $P \subset Q$.*

Ejemplo. $P = \{0, 1/2, 1\}$ y $Q = \{0, 1/2, 2/3, 1\}$ son particiones de $[0,1]$ y

$$Q \text{ es más fina que } P.$$

Proposición. *Para cualquier par de particiones P y Q de un intervalo $[a,b]$ existe una partición R que es, a la vez, más fina que P y que Q.*

Problema. *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Dado un punto $x_* \in (a, b)$ que no pertenece a P consideremos la partición de $[a, b]$ definida como*

$$Q = P \cup \{x_*\}.$$

¿Qué relación hay entre $L(f; P)$ y $L(f; Q)$? (Notemos que Q es más fina que P.)

Problema. *Sean* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada y* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$.
Dado un punto $x_* \in (a, b)$ *que no pertenece a* P *consideremos la partición de* $[a, b]$ *definida como*

$$Q = P \cup \{x_*\}.$$

¿Qué relación hay entre $L(f; P)$ *y* $L(f; Q)$*?* (Notemos que Q es más fina que P.)
Recordemos que

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

donde $m_k = \inf\{f(x) \, : \, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.

Problema. *Sean* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada y* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$.
Dado un punto $x_* \in (a, b)$ *que no pertenece a* P *consideremos la partición de* $[a, b]$ *definida como*

$$Q = P \cup \{x_*\}.$$

¿Qué relación hay entre $L(f; P)$ *y* $L(f; Q)$*?* (Notemos que Q es más fina que P.)
Recordemos que

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

donde $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.
Cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ nos da un sumando para $L(f; P)$.

Problema. *Sean* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada y* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$.
Dado un punto $x_* \in (a, b)$ *que no pertenece a* P *consideremos la partición de* $[a, b]$ *definida como*

$$Q = P \cup \{x_*\}.$$

¿Qué relación hay entre $L(f; P)$ *y* $L(f; Q)$*?* (Notemos que Q es más fina que P.)
Recordemos que

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

donde $m_k = \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.
Cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ nos da un sumando para $L(f; P)$.
¿Qué nos da cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ para la suma $L(f; Q)$?

Denotemos por $\mathcal{P}(I)$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $I = [a, b]$.

Denotemos por $\mathcal{P}(I)$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $I = [a, b]$.

Proposición. *Sean $I = [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ acotada.*

(i) *Para cualquier $P \in \mathcal{P}(I)$ y cualquier suma de Riemann $S(f; P)$ se tiene*

$$L(f; P) \leq S(f; P) \leq U(f; P).$$

(ii) *Si $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ son tales que $P \subset Q$ entonces*

$$L(f; P) \leq L(f; Q) \quad y \quad U(f; P) \geq U(f; Q).$$

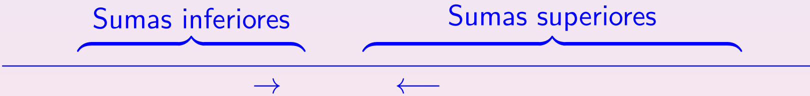
(iii) *Para cualquier par $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ se tiene*

$$L(f; P) \leq U(f; Q).$$

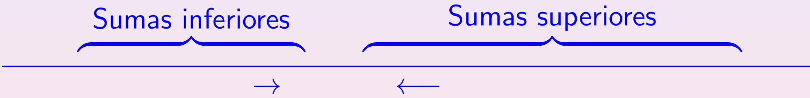
Más sobre sumas inferiores y superiores

¿Qué sucede con las sumas inferiores si se afinan las particiones?

Visualización: Las flechas indican hacia dónde se “mueven” las sumas inferiores y las sumas superiores sobre la recta real a medida que se afinan las particiones.



Visualización: Las flechas indican hacia dónde se "mueven" las sumas inferiores y las sumas superiores sobre la recta real a medida que se afinan las particiones.



Ejercicio. Si $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$ entonces

$$m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;Q) \leq M(b-a)$$

para cualquier par $P, Q \in \mathcal{P}(I)$.

Integrales inferiores y superiores

¡Existen para cualquier función acotada en un intervalo compacto!

Definición. *Sean* $I = [a, b]$ *y* $f : I \to \mathbb{R}$ *acotada. La* **integral inferior** *de* f *en* I *es el número*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f;P) \,:\, P \in \mathcal{P}(I)\},$$

y se define la **integral superior** *de* f *en* I *como*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f;P) \,:\, P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Definición. *Sean $I = [a,b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ acotada.*
La **integral inferior** *de f en I es el número*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f;P) \, : \, P \in \mathcal{P}(I)\},$$

y se define la **integral superior** *de f en I como*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f;P) \, : \, P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Ejercicio. Si $m = \inf\{f(x) \, : \, x \in I\}$ y $M = \sup\{f(x) \, : \, x \in I\}$ entonces

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a).$$

Definición. *Sean $I = [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ acotada. Diremos que f es* **integrable en I en el sentido de Riemann** *(o f es Riemann–integrable en I) cuando*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

y, en tal caso, dicho valor es la **integral de f en I**, *que denotaremos por*

$$\int_a^b f \quad o\ por \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Notación. Cuando tenga sentido, también se definen

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^a f = 0.$$

Definiciones de integral de Riemann

En resumen, para $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada diremos que f es integrable en I y que su integral en I vale $A \in \mathbb{R}$ si se cumple alguna de las tres siguientes condiciones:

1. El número A es el único que satisface la condición de que

$$L(f; P) \leq A \leq U(f; P) \quad \text{para cualquier } P \in \mathcal{P}(I).$$

Definiciones de integral de Riemann

En resumen, para $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada diremos que f es integrable en I y que su integral en I vale $A \in \mathbb{R}$ si se cumple alguna de las tres siguientes condiciones:

1. El número A es el único que satisface la condición de que
$$L(f; P) \leq A \leq U(f; P) \quad \text{para cualquier } P \in \mathcal{P}(I).$$
2. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(I)$ cumple $\|P\| < \delta$ entonces $|S(f; P) - A| < \varepsilon$ para cualquier elección de puntos intermedios.

Definiciones de integral de Riemann

En resumen, para $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada diremos que f es integrable en I y que su integral en I vale $A \in \mathbb{R}$ si se cumple alguna de las tres siguientes condiciones:

1. El número A es el único que satisface la condición de que
$$L(f; P) \leq A \leq U(f; P) \quad \text{para cualquier } P \in \mathcal{P}(I).$$
2. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(I)$ cumple $\|P\| < \delta$ entonces $|S(f; P) - A| < \varepsilon$ para cualquier elección de puntos intermedios.
3. $$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = A.$$

Criterio de integrabilidad de Riemann

Recordemos que una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en I si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$,

Criterio de integrabilidad de Riemann

Recordemos que una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en I si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, es decir, si

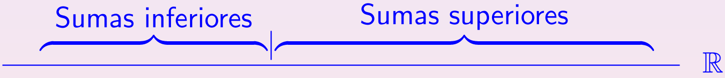
$$\sup\{L(f;P) \,:\, P \in \mathcal{P}(I)\} = \inf\{U(f;P) \,:\, P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Criterio de integrabilidad de Riemann

Recordemos que una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en I si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, es decir, si

$$\sup\{L(f; P) \, : \, P \in \mathcal{P}(I)\} = \inf\{U(f; P) \, : \, P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Gráficamente, si f es integrable tenemos

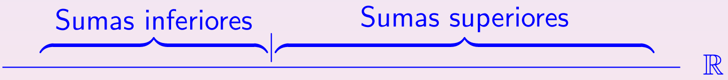


Criterio de integrabilidad de Riemann

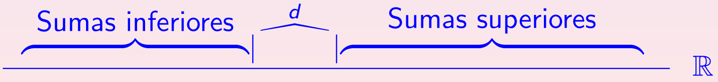
Recordemos que una función acotada $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en I si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, es decir, si

$$\sup\{L(f;P) \,:\, P \in \mathcal{P}(I)\} = \inf\{U(f;P) \,:\, P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Gráficamente, si f es integrable tenemos



... y si f no es integrable entonces



con $d = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0$.

Criterio de integrabilidad de Riemann

Por lo tanto, para que una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sea integrable en I es necesario y suficiente que existan sumas superiores e inferiores tan cerca una de otra como queramos,

Criterio de integrabilidad de Riemann

Por lo tanto, para que una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sea integrable en I es necesario y suficiente que existan sumas superiores e inferiores tan cerca una de otra como queramos, es decir, que

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existan } P, Q \in \mathcal{P}(I) \text{ tales que} \\ \\ \qquad\qquad U(f; Q) - L(f; P) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Criterio de integrabilidad de Riemann

Por lo tanto, para que una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sea integrable en I es necesario y suficiente que existan sumas superiores e inferiores tan cerca una de otra como queramos, es decir, que

$$(*) \quad \begin{cases} \text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existan } P, Q \in \mathcal{P}(I) \text{ tales que} \\ \\ U(f; Q) - L(f; P) < \varepsilon. \end{cases}$$

Teorema (Criterio de integrabilidad de Riemann). *Para una función acotada $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ las dos siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La función f es integrable en I;*
2. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe alguna partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(I)$ tal que*

$$U(f; P_\varepsilon) - L(f; P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Teorema (Integrabilidad de las monótonas).
Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona en I entonces f es integrable en I.

Teorema (Integrabilidad de las monótonas).
Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona en I entonces f es integrable en I.

Teorema (Integrabilidad de las continuas).
Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I entonces f es integrable en I.