# Definición de la integral de Riemann (Esto forma parte del Tema 1)

Rodrigo López Pouso

Departmento de Análise Matemática

Facultade de Matemáticas

Universidade de Santiago de Compostela

Santiago, 2011

# Esquema



Objetivos del tema:

# Esquema

Objetivos del tema:

1) Presentar una definición de la integral de Riemann;

# Esquema



Objetivos del tema:

1) Presentar una definición de la integral de Riemann;

2) Interpretar geométricamente dicha definición;

# Esquema



Objetivos del tema:
1) Presentar una definición de la integral de Riemann;
2) Interpretar geométricamente dicha definición;
3) Usar lo aprendido en 1) y 2) para justificar otras aplicaciones de la integral definida (cálculo de longitudes, volúmenes, etc.)

# Esquema



Objetivos del tema:
1) Presentar una definición de la integral de Riemann;
2) Interpretar geométricamente dicha definición;
3) Usar lo aprendido en 1) y 2) para justificar otras aplicaciones de la integral definida (cálculo de longitudes, volúmenes, etc.)
Para completar el punto 1) utilizaremos tres conceptos fundamentales:

# Esquema

Objetivos del tema:
1) Presentar una definición de la integral de Riemann;
2) Interpretar geométricamente dicha definición;
3) Usar lo aprendido en 1) y 2) para justificar otras aplicaciones de la integral definida (cálculo de longitudes, volúmenes, etc.)
Para completar el punto 1) utilizaremos tres conceptos fundamentales:

1.a) Partición de un intervalo;

# Esquema



Objetivos del tema:
1) Presentar una definición de la integral de Riemann;
2) Interpretar geométricamente dicha definición;
3) Usar lo aprendido en 1) y 2) para justificar otras aplicaciones de la integral definida (cálculo de longitudes, volúmenes, etc.)
Para completar el punto 1) utilizaremos tres conceptos fundamentales:

1.a) Partición de un intervalo;
1.b) Suma inferior de una función relativa a una partición;

# Esquema

Objetivos del tema:

1) Presentar una definición de la integral de Riemann;

2) Interpretar geométricamente dicha definición;

3) Usar lo aprendido en 1) y 2) para justificar otras aplicaciones de la integral definida (cálculo de longitudes, volúmenes, etc.)

Para completar el punto 1) utilizaremos tres conceptos fundamentales:

1.a) Partición de un intervalo;

1.b) Suma inferior de una función relativa a una partición;

1.c) Suma superior de una función relativa a una partición.

# Motivación

## El problema del cálculo de un área



**Problema.** Dada una función acotada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [a,b]$$

¿cómo podemos asignar un valor de área al recinto del plano delimitado por la gráfica de $f$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$?

**Problema.** Dada una función acotada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [a, b]$$

¿cómo podemos asignar un valor de área al recinto del plano delimitado por la gráfica de $f$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$?

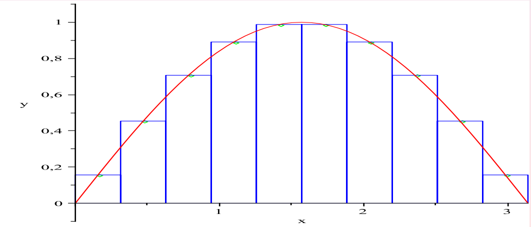
En principio, vamos a aproximar dicho recinto mediante uniones de rectángulos que no se solapen.

**Problema.** Dada una función acotada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [a, b]$$

¿cómo podemos asignar un valor de área al recinto del plano delimitado por la gráfica de $f$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$?

En principio, vamos a aproximar dicho recinto mediante uniones de rectángulos que no se solapen.



# Particiones

(Las usaremos para construir las bases de los rectángulos)

**Definición.** *Una* **partición** *de un intervalo* $I = [a, b]$ *es una familia finita de puntos de* $I$*, pongamos* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *con* $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

# Particiones

(Las usaremos para construir las bases de los rectángulos)

**Definición.** *Una* **partición** *de un intervalo* $I = [a, b]$ *es una familia finita de puntos de* $I$*, pongamos* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *con* $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $I$ permite subdividir dicho intervalo en $n$ subintervalos:

$$I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

(cada uno de los cuales será la base de un rectángulo).

# Particiones

(Las usaremos para construir las bases de los rectángulos)



**Definición.** *Una* **partición** *de un intervalo* $I = [a, b]$ *es una familia finita de puntos de* $I$, *pongamos* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *con* $n \in \mathbb{N}$, *tal que* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $I$ permite subdividir dicho intervalo en $n$ subintervalos:

$$I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

(cada uno de los cuales será la base de un rectángulo).

La longitud del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $x_k - x_{k-1}$ (esta será, por tanto, la longitud de la base del rectángulo correspondiente).

# Sumas inferiores y superiores

(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (no necesariamente de signo constante).

**Definición.** *La* **suma inferior** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es el número*

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}),$$

*donde $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.*

# Sumas inferiores y superiores

## (Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (no necesariamente de signo constante).

**Definición.** *La* **suma inferior** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es el número*

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

*donde* $m_k = \inf\{f(x) \, : \, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.

¡$L(f; P)$ consta de $n$ sumandos!

# Sumas inferiores y superiores

(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (no necesariamente de signo constante).

**Definición.** *La* **suma inferior** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es el número*

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}),$$

*donde $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.*

¡$L(f; P)$ consta de $n$ sumandos! Uno por cada subintervalo definido por la partición $P$.

# Sumas inferiores y superiores

(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (no necesariamente de signo constante).

**Definición.** *La* **suma inferior** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es el número*

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

*donde* $m_k = \inf\{f(x) \, : \, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.

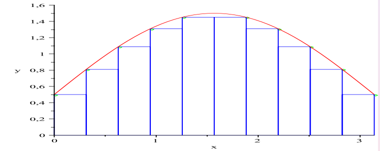
¡$L(f; P)$ consta de $n$ sumandos! Uno por cada subintervalo definido por la partición $P$.

¿Por qué exigimos que $f$ esté acotada?

# Sumas inferiores y superiores
(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)



La suma inferior $L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$, tiene la siguiente interpretación geométrica si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$:




La suma inferior es la suma de las áreas de los rectángulos (y el área bajo la gráfica de $f$ debería ser un número mayor que $L(f;P)$).

# Sumas inferiores y superiores

(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)

**Definición.** *La* **suma superior** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es el número*

$$U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

*donde* $M_k = \sup\{f(x) \, : \, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.

# Sumas inferiores y superiores

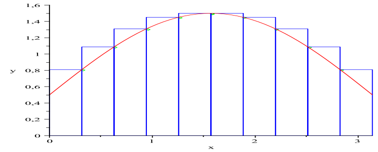
(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)

**Definición.** *La* **suma superior** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es el número*

$$U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

*donde $M_k = \sup\{f(x) \, : \, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $k = 1, \ldots, n$.*

Interpretación geométrica si $f \geq 0$ en $I$:




La suma superior es la suma de las áreas de los rectángulos (y el área bajo la gráfica de $f$ debería ser un número menor que $U(f;P)$).

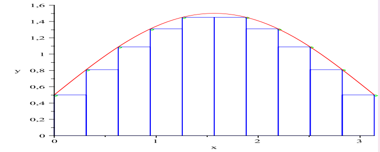
# Sumas inferiores y superiores

(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)

Volviendo al problema de la definición del área bajo la gráfica de una función no negativa podemos afirmar que

# Sumas inferiores y superiores
(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)

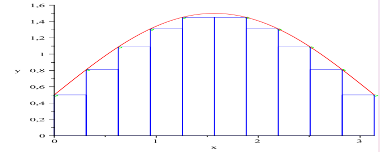
Volviendo al problema de la definición del área bajo la gráfica de una función no negativa podemos afirmar que
Las sumas inferiores dan aproximaciones por defecto del área que buscamos...



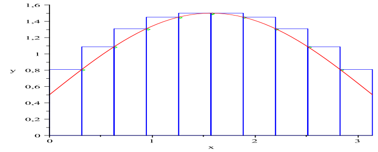
# Sumas inferiores y superiores

(Son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$)

Volviendo al problema de la definición del área bajo la gráfica de una función no negativa podemos afirmar que
Las sumas inferiores dan aproximaciones por defecto del área que buscamos...




...y las sumas superiores dan aproximaciones por exceso



# Definición de la integral de Riemann

No será la única que veremos este curso...



Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (si no lo fuera no podríamos hablar de sumas inferiores o superiores).

# Definición de la integral de Riemann

No será la única que veremos este curso...



Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (si no lo fuera no podríamos hablar de sumas inferiores o superiores).

**Definición**. La integral de Riemann de la función $f$ en el intervalo $I = [a, b]$ es, si existe, el único número real $A$ tal que

$$L(f; P) \leq A \leq U(f; P) \quad \text{para cualquier partición } P \text{ de } I.$$

# Definición de la integral de Riemann

No será la única que veremos este curso...



Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (si no lo fuera no podríamos hablar de sumas inferiores o superiores).

**Definición**. La integral de Riemann de la función $f$ en el intervalo $I = [a, b]$ es, si existe, el único número real $A$ tal que

$$L(f; P) \le A \le U(f; P) \quad \text{para cualquier partición } P \text{ de } I.$$

Si tal número $A$ existe entonces se denota por

$$A = \int_a^b f(x)\, dx,$$

y se dice que la función $f$ es integrable (en el sentido de Riemann) en el intervalo $I$.

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable **y no negativa** en $I$, es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

# Interpretación geométrica de la integral de Riemann

## ¡Solamente cuando $f \geq 0$!



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable **y no negativa** en $I$, es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Por definición, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el único número real $A$ tal que

$$(*) \qquad L(f; P) \leq A \leq U(f; P) \quad \text{para cualquier partición } P \text{ de } I.$$

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable **y no negativa** en $I$, es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Por definición, $\int_a^b f(x)\, dx$ es el único número real $A$ tal que

$$(*) \qquad L(f;P) \leq A \leq U(f;P) \quad \text{para cualquier partición } P \text{ de } I.$$

Ya que $f \geq 0$ en $I$, para cualquier partición $P$ de $I$ sabemos que

# Interpretación geométrica de la integral de Riemann

## ¡Solamente cuando $f \geq 0$!



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable **y no negativa** en $I$, es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
Por definición, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el único número real $A$ tal que

$$(*) \qquad L(f; P) \leq A \leq U(f; P) \quad \text{para cualquier partición } P \text{ de } I.$$

Ya que $f \geq 0$ en $I$, para cualquier partición $P$ de $I$ sabemos que $L(f; P)$ es menor que el área bajo la gráfica de $f$,

# Interpretación geométrica de la integral de Riemann

## ¡Solamente cuando $f \geq 0$!



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable **y no negativa** en $I$, es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
Por definición, $\int_a^b f(x)\, dx$ es el único número real $A$ tal que

$$(*) \qquad L(f; P) \leq A \leq U(f; P) \quad \text{para cualquier partición } P \text{ de } I.$$

Ya que $f \geq 0$ en $I$, para cualquier partición $P$ de $I$ sabemos que
$L(f; P)$ es menor que el área bajo la gráfica de $f$,
y $U(f; P)$ es mayor que el área bajo la gráfica de $f$.

# Interpretación geométrica de la integral de Riemann

## ¡Solamente cuando $f \geq 0$!



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable **y no negativa** en $I$, es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
Por definición, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el único número real $A$ tal que

$$(*) \qquad L(f;P) \leq A \leq U(f;P) \quad \text{para cualquier partición } P \text{ de } I.$$

Ya que $f \geq 0$ en $I$, para cualquier partición $P$ de $I$ sabemos que
$L(f;P)$ es menor que el área bajo la gráfica de $f$,
y $U(f;P)$ es mayor que el área bajo la gráfica de $f$.
**Así pues, el área bajo la gráfica de $f$ coincide con $A = \int_a^b f(x)\,dx$.**

# Norma de una partición

Se define la **norma** de una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ como

$$\|P\| = \max\{\, x_k - x_{k-1} \;:\; k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

# Norma de una partición

Se define la **norma** de una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ como

$$\|P\| = \max\{\, x_k - x_{k-1} \;:\; k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Es decir, $\|P\|$ es la mayor de las distancias entre dos puntos consecutivos de la partición.

# Norma de una partición



Se define la **norma** de una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ como

$$\|P\| = \max\{\, x_k - x_{k-1} \ : \ k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Es decir, $\|P\|$ es la mayor de las distancias entre dos puntos consecutivos de la partición.

**Ejemplo.** La partición $\{0, 1/2, 1\}$ de $[0, 1]$ tiene norma $1/2$; la partición $\{0, 2/3, 1\}$ tiene norma $2/3$.

# Norma de una partición



Se define la **norma** de una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ como

$$\|P\| = \max\{\, x_k - x_{k-1} \;:\; k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Es decir, $\|P\|$ es la mayor de las distancias entre dos puntos consecutivos de la partición.

**Ejemplo.** La partición $\{0, 1/2, 1\}$ de $[0, 1]$ tiene norma $1/2$; la partición $\{0, 2/3, 1\}$ tiene norma $2/3$.

Si $P$ y $Q$ son dos particiones de un intervalo $[a, b]$ y $P \subset Q$ entonces

$$\|P\| \geq \|Q\|.$$

# Norma de una partición



Se define la **norma** de una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ como

$$\|P\| = \max\{\, x_k - x_{k-1} \ :\ k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Es decir, $\|P\|$ es la mayor de las distancias entre dos puntos consecutivos de la partición.

**Ejemplo.** La partición $\{0, 1/2, 1\}$ de $[0, 1]$ tiene norma $1/2$; la partición $\{0, 2/3, 1\}$ tiene norma $2/3$.

Si $P$ y $Q$ son dos particiones de un intervalo $[a, b]$ y $P \subset Q$ entonces

$$\|P\| \geq \|Q\|.$$

**Ejercicio.** Si $\|P\| \geq \|Q\|$ ¿entonces $P \subset Q$?

# Sumas de Riemann

## También son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$



Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

**Definición.** *La* **suma de Riemann** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y* **a los puntos intermedios** *$y_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ es el número*

$$S(f; P) = \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}).$$

# Sumas de Riemann

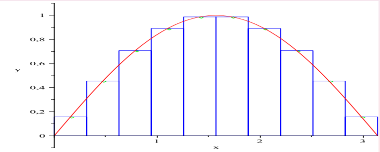
## También son sumas de áreas de rectángulos si $f \geq 0$

Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

**Definición.** *La* **suma de Riemann** *de $f$ relativa a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y* **a los puntos intermedios** $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *$(k = 1, 2, \ldots, n)$ es el número*

$$S(f; P) = \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Si $f \geq 0$ entonces...




...la suma de Riemann es una suma de áreas de rectángulos con base $x_k - x_{k-1}$ y altura $f(y_k)$.

# Segunda definición de integral

## Usando sumas de Riemann en lugar de sumas inferiores y superiores



**Teorema.** *Sea $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La función $f$ es integrable en $I$ y su integral vale $A$;*
2. *Existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P$ es una partición de $I$ con $\|P\| < \delta$ entonces*

$$|S(f; P) - A| < \varepsilon,$$

*con independencia de los puntos intermedios escogidos para construir $S(f; P)$;*

**Teorema.** *Sea* $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La función* $f$ *es integrable en* $I$ *y su integral vale* $A$;
2. *Existe* $A \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $P$ *es una partición de* $I$ *con* $\|P\| < \delta$ *entonces*
$$|S(f;P) - A| < \varepsilon,$$
*con independencia de los puntos intermedios escogidos para construir* $S(f;P)$;
3. *Existe* $A \in \mathbb{R}$ *tal que*
$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f;P) = A,$$
*con independencia de los puntos intermedios escogidos para construir* $S(f;P)$.