

# Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon\*

F. Alcalde Cuesta<sup>1</sup>, A. Lozano Rojo<sup>2</sup> et M. Macho Stadler<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Xeometría e Topoloxía, Universidade de Santiago de Compostela,  
15782 Santiago de Compostela (Espagne)

<sup>2</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea,  
48940 Leioa (Espagne)

## 1 Introduction

Il y a des laminations minimales par surfaces de Riemann où les types conformes des feuilles se mélangent. Le premier exemple a été construit par É. Ghys [4] à partir d'un arbre apériodique et répétitif décrit par R. Kenyon [7]. La construction comporte deux étapes distinctes, valables pour tout sous-graphe répétitif du graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  d'un groupe infini de type fini  $G$ . Il s'agit d'abord de construire un espace compact, muni d'un feuilletage par graphes, puis d'obtenir une lamination par surfaces de Riemann. Soit  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  l'ensemble des sous-graphes infinis de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$  de  $G$ . On munit  $\mathcal{T}$  de la *topologie de Gromov-Hausdorff* pour laquelle deux sous-graphes de  $\mathcal{G}$  sont proches s'ils coïncident sur une grande boule centrée en  $e$ . Puisqu'une boule ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que  $\mathcal{T}$  est compact. Grâce à l'action de  $G$  sur  $\mathcal{G}$ , on définit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie un arbre  $T$  et son translaté  $T' = g^{-1}.T$  si  $g \in T$ . On peut d'ailleurs réaliser  $\mathcal{T}$  comme un sous-espace d'un espace métrique compact  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ , muni d'un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$  dont toutes les feuilles sont rencontrées par  $\mathcal{T}$ . Alors  $\mathcal{R}$  est induite par  $\mathcal{F}$  et les classes d'équivalence sont les ensembles de sommets des feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Pour tout graphe  $T \in \mathcal{T}$ , l'ensemble  $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$  est un fermé saturé pour  $\mathcal{R}$ , appelé l'*enveloppe de T*. Il est réalisable comme transversale complète d'un espace

---

\*Financé par Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2002-04439, Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-08214 et Universidad del País Vasco UPV 00127.310-E-14790/2002.

feuilleté compact  $\mathbf{X}$ , à savoir la fermeture de la feuille  $L_T \in \mathcal{F}$  passant par  $T$ . Les ensembles  $X$  et  $\mathbf{X}$  sont minimaux si et seulement si le graphe  $T$  est *répétitif*, i.e. pour tout nombre réel  $r > 0$ , il existe un nombre réel  $R > 0$  tel que toute boule de rayon  $R > 0$  contient une boule qui est l'image par translation de la boule de centre  $e$  et rayon  $r > 0$ . Par ailleurs, l'holonomie de  $L_T$  est triviale si et seulement si  $T$  est *apériodique*, i.e.  $T \neq g.T$  pour tout élément  $g \neq e$  de  $G$ . Ces définitions s'inspirent de définitions analogues pour les pavages [1, 9].

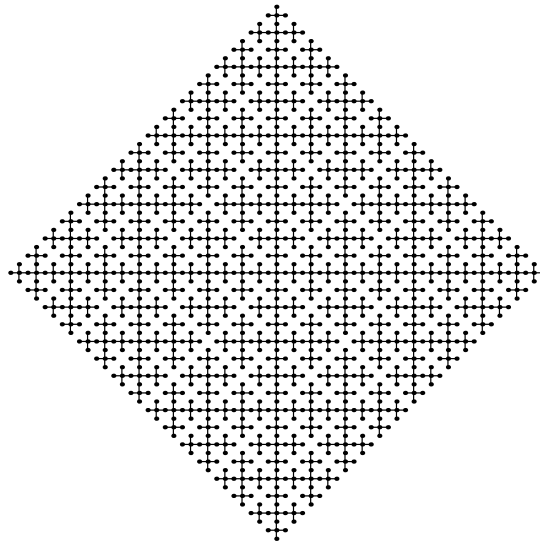


Figure 1: Arbre de Kenyon

Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys-Kenyon* la fermeture  $\mathbf{X}$  de la feuille  $L_{T_\infty}$  passant par l'arbre de Kenyon  $T_\infty$  (voir la figure 1) dans l'espace  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ , munie du feuilletage induit par  $\mathcal{F}$ . Les feuilles sont des sous-arbres répétitifs et apériodiques du graphe de Cayley  $\mathcal{Z}^2$  de  $\mathbb{Z}^2$ . En remplaçant ces arbres par des surfaces, on obtient la lamination  $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$  décrite par É. Ghys. Nous l'appellerons *lamination de Ghys-Kenyon*. Dans ce travail, nous allons récupérer l'espace  $\mathbf{X}$  par un procédé de construction de sous-arbres répétitifs et apériodiques de  $\mathcal{Z}^2$  à partir de suites de 4 éléments. Grâce à codage, nous montrerons que la dynamique transverse de ce feuilletage est représentée par l'automate suivant:

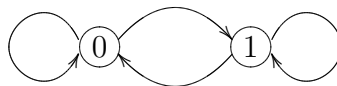


Figure 2: Machine à sommer binaire

Cela signifie que  $\mathcal{R}$  est *stablement orbitalement équivalente* à la relation engendrée par la somme  $S(x) = x + 1$  définie sur l'anneau des entiers 2-adiques, ou de manière équivalente par la transformation  $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  définie par:

- i) si  $\alpha_0 = 0$ , alors  $T(\alpha)_0 = 1$  et  $T(\alpha)_n = \alpha_n$  pour tout  $n \geq 1$ ,
- ii) si  $\alpha_0 = 1$ , alors  $T(\alpha)_0 = 0$  et  $T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0$  avec  $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$ .

Nous compléterons l'étude de l'exemple en décrivant sa dynamique topologique. Nous montrerons ainsi que  $\mathcal{L}$  est *affable*, en ce sens que  $\mathcal{R}$  est la limite inductive d'une suite de relations d'équivalence étales compactes [5]. La dynamique transverse de  $\mathcal{L}$  sera ainsi représentée par un système dynamique classique.

## 2 L'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff

Soit  $S$  un système fini de générateurs de  $G$ . Le *graphe de Cayley*  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  est un graphe localement fini non orienté, sans boucle, ni arête multiple, dont les sommets sont les éléments de  $G$ . Deux sommets  $g_1$  et  $g_2$  sont reliés par une arête si  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . On appelle *longueur* de  $g$  le plus petit nombre d'éléments de  $S$  nécessaires pour écrire  $g$ , i.e.  $\text{long}_S(g) = \min\{n \geq 1 / g = s_1 \dots s_n \text{ avec } s_i s_{i+1} \neq e\}$ . La *distance des  $S$ -mots* est alors donnée par  $d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2)$  pour tout couple  $g_1, g_2 \in G$ . Cette distance se prolonge en une distance sur  $\mathcal{G}$  telle que toute arête est isométrique à l'intervalle  $[0, 1]$ . Le graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  devient ainsi un espace métrique connexe par chemins sur lequel le groupe  $G$  agit par isométries.

### 2.1 Topologie de Gromov-Hausdorff

Soit  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  l'ensemble des sous-graphes  $T$  de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$  de  $G$ . Notons  $B_T(e, N)$  (resp.  $\overline{B}_T(e, N)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $e$  et de rayon  $N$  et  $\text{val}_T(e)$  la valence de  $e$ , i.e. le nombre d'arêtes issues de  $e$ . Considérons l'ensemble  $A = \{ N \geq 1 / B_T(e, N) = B_{T'}(e, N) \}$  et la quantité

$$R(T, T') = \begin{cases} \sup A & \text{si } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

qui appartient à  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  pour tout couple  $T, T' \in \mathcal{T}$ . On définit alors la *distance de Gromov-Hausdorff* par  $d(T, T') = e^{-R(T, T')}$ . C'est une ultramétrique et donc  $\mathcal{T}$  est totalement discontinu. Puisque la boule fermée  $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e, N)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que  $\mathcal{T}$  est compact. Les sous-graphes finis de  $\mathcal{G}$  correspondent aux points isolés de  $\mathcal{T}$ . Nous noterons désormais  $\mathcal{T}$  l'ensemble des sous-graphes *infinis* de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$ . L'avantage de la nouvelle définition est mise en évidence par le fait que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  est alors homéomorphe à l'ensemble de Cantor, sauf si  $G = \mathbb{Z}$ .

## 2.2 Structure feuilletée

L'espace  $\mathcal{T}$  est muni d'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie deux graphes  $T$  et  $T'$  si  $T' = g^{-1}.T$  avec  $g \in T$ . Toute classe d'équivalence  $\mathcal{R}[T]$  peut être alors réalisée comme l'ensemble de sommets d'un graphe  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ . Il suffit de joindre  $T' = g^{-1}.T$  et  $T'' = h^{-1}.T$  par une arête si  $d_S(g, h) = 1$ . Le graphe  $\overline{\mathcal{R}}[T]$  est donc isomorphe au quotient de  $T$  par le groupe de translations  $\text{Iso}(T) = \{g \in \mathcal{G} / T = g.T\}$ . C'est une feuille de l'espace feuilleté compact fourni par le résultat suivant:

**Théorème de réalisation géométrique 2.2.1.** *Il y a un espace compact, métrisable et séparable  $\mathcal{T}$ , muni d'un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$ , pour lequel  $\mathcal{T}$  est une transversale complète et  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence induite sur  $\mathcal{T}$ .*

**Preuve.** Considérons le sous-espace  $\tilde{\mathcal{T}} = \{(T, g) \in \mathcal{T} \times \mathcal{G} / g \text{ est un sommet de } T\}$  de  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ , muni de la pseudodistance  $d((T_1, g_1), (T_2, g_2)) = d(g_1^{-1}.T_1, g_2^{-1}.T_2)$ . Alors  $\mathcal{T}$  est le quotient de  $\tilde{\mathcal{T}}$  par l'action diagonale de  $G$  sur  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ . Chaque classe d'équivalence  $\mathcal{R}[T]$  est obtenue par passage au quotient à partir de l'orbite de  $(T, e)$ . L'ensemble  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)} = \overline{B}_{\tilde{\mathcal{T}}}((T_1, g_1), e^{-1}) = \{(T_2, g_2) \in \tilde{\mathcal{T}} / \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) = \overline{B}_{g_2^{-1}.T_2}(e, 1)\}$  est un ouvert-fermé qui se projette sur l'ouvert-fermé  $U_{g_1^{-1}.T_1} = \overline{B}_{\mathcal{T}}(g_1^{-1}.T_1, e^{-1})$ . Puisque  $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e, 1)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, les ensembles  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)}$  et  $U_{g_1^{-1}.T_1}$  définissent des partitions finies de  $\tilde{\mathcal{T}}$  et  $\mathcal{T}$  respectivement. Nous allons remplacer  $\tilde{\mathcal{T}}$  par l'ensemble  $\tilde{\mathcal{T}}$  des couples  $(T, x)$  où  $x$  est un point quelconque de  $T$  qui peut appartenir à l'intérieur  $\mathring{e}$  d'une arête  $e$  de  $T$ . L'application  $\psi_{(T_1, g_1)} : ((T_2, g_2), x) \in \tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto (T_2, g_2.x) \in \tilde{\mathcal{T}}$  est injective en restriction aux ensembles  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$  et  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$ . Leurs images  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}$  et  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$  sont munies de topologies telles que les restrictions et leurs inverses  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)} : \tilde{V}_{(T_1, g_1)} \rightarrow \tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$  et  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e : \tilde{V}_{(T_1, g_1)}^e \rightarrow \tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$  sont des homéomorphismes. On munit  $\tilde{\mathcal{T}}$  de la topologie faible pour laquelle  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}$  et  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$  forment un recouvrement ouvert fini. On vérifie aisément que:

- i) l'espace  $\tilde{\mathcal{T}}$  est réalisé comme un sous-espace compact de  $\tilde{\mathcal{T}}$ ,
- ii) l'action de  $G$  sur  $\tilde{\mathcal{T}}$  s'étend en une action de  $G$  sur  $\tilde{\mathcal{T}}$ ,
- iii) les cartes locales  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}$  et  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e$  forment un atlas feuilleté sur  $\tilde{\mathcal{T}}$  qui définit un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$  invariant par l'action de  $G$ .

Soit  $\mathcal{T}$  le quotient de  $\tilde{\mathcal{T}}$  par l'action de  $G$ . Alors les applications

$$\psi_{g_1^{-1}.T_1} : (g_2^{-1}.T_2, x) \in U_{g_1^{-1}.T_1} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto x^{-1}.(g_2^{-1}.T_2) \in \mathcal{T}$$

définissent des cartes locales

$$\varphi_{g_1^{-1}.T_1} : V_{g_1^{-1}.T_1} \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \varphi_{g_1^{-1}.T_1}^e : V_{g_1^{-1}.T_1}^e \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times \mathring{e}$$

et donc l'espace  $\mathcal{T}$  possède un atlas feuilleté fini. Il est compact car les plaques sont relativement compactes et les transversales sont compactes.  $\square$

### 2.3 Structure transverse

Nous allons préciser ici la notion de *dynamique transverse* (*mesurable* ou *topologique*) utilisée dans la introduction. D'abord, la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est définie par l'action d'un pseudogroupe de transformations  $\Gamma$  engendré par les translations  $\tau_g : T \mapsto g^{-1}.T$  associées aux éléments de  $G$ . Chacune de ces applications est définie sur l'ouvert-fermé  $D_g = \{T \in \mathcal{T}/g \in T\}$  de  $\mathcal{T}$ . Le théorème 2.2.1 montre que  $\Gamma$  est le *pseudogroupe d'holonomie de  $\mathcal{F}$  réduit à  $\mathcal{T}$* . Nous utiliserons donc la notion de *dynamique transverse* introduite par A. Haefliger [6].

Néanmoins, si l'holonomie est triviale, la dynamique transverse est représentée par la relation d'équivalence induite sur toute transversale complète. Rappelons qu'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur un espace borélien standard  $X$  est *mesurable discrète* si les classes d'équivalence sont dénombrables et si le graphe est un borélien de  $X \times X$ . On appelle *transformation partielle de  $\mathcal{R}$*  tout isomorphisme borélien  $\varphi : A \rightarrow B$  entre parties boréliennes de  $X$  dont le graphe  $G(\varphi) = \{(x, y) \in X \times X / y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}$ . Une mesure borélienne  $\mu$  sur  $X$  est dite *invariante pour  $\mathcal{R}$*  si elle est invariante pour toute transformation partielle  $\varphi$ , i.e.  $\mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$  pour tout borélien  $B' \subset B$ . La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  est mesurable discrète car les classes d'équivalence sont dénombrables et le graphe de  $\mathcal{R}$  est un borélien de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  en tant que réunion des graphes des transformations partielles  $\tau_g$  définies sur les ouverts-fermés  $\overline{B}_{\mathcal{T}}(T, e^{-1})$  (avec  $g \in \overline{B}_{\mathcal{T}}(e, 1)$ ) et de leurs compositions.

**Définition 2.3.1.** Deux relations d'équivalence mesurées  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  et  $(\mathcal{R}', X', \mu')$  sont dites:

- i) *orbitalement équivalentes* si  $X$  et  $X'$  contiennent des boréliens  $Y$  et  $Y'$  saturés pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  et de mesure totale pour lesquels il existe un isomorphisme borélien  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  tel que  $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in Y$  et  $f_*\mu \sim \mu'$ ;
- ii) *stablement orbitalement équivalentes* si  $X$  et  $X'$  contiennent des boréliens  $Y$  et  $Y'$  dont les saturés pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont de mesure totale tels que les relations d'équivalence induites  $\mathcal{R}|_Y$  et  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  sont orbitalement équivalentes. Nous dirons alors que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  représentent une même *dynamique mesurable*.

Toute relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur un espace borélien ou topologique  $X$  est munie d'une structure naturelle de groupoïde caractérisée par les données suivantes: l'inclusion  $\varepsilon : x \in X \mapsto (x, x) \in \mathcal{R}$  de l'espace des unités  $X$  dans  $\mathcal{R}$ , les projections  $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X$  et  $\alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$ , l'ensemble des couples composables  $\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} / \alpha(x, y) = y = x' = \beta(x', y')\}$ , la

multiplication partielle  $\mu : ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto (x, y') \in \mathcal{R}$  et l'inversion  $\iota : (x, y) \in \mathcal{R} \rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ . La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est dite *topologique* si elle l'est comme groupoïde, c'est-à-dire si le graphe de  $\mathcal{R}$  est muni d'une topologie (qui en fait un espace localement compact séparé) telle que  $\alpha, \beta : \mathcal{R} \rightarrow X$  et  $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  sont continues et  $\iota : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  est un homéomorphisme. Une telle relation d'équivalence est dite  $\beta$ -discrète si  $X$  est ouvert dans  $\mathcal{R}$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{T}$  et tout élément  $g$  de  $G$ , notons  $O(U, g) = \{(T, g^{-1}.T) \in \mathcal{R}/T \in U \cap D_g\}$  le graphe de la translation  $\tau_g$  restreinte à  $U$ . Les ensembles  $O(U, g)$  engendrent une topologie sur  $\mathcal{R}$ , plus fine que celle induite par la topologie produit sur  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ , qui en fait une relation d'équivalence topologique  $\beta$ -discrète.

**Définition 2.3.2.** Deux relations d'équivalence  $\beta$ -discrètes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sur  $X$  et  $X'$  sont dites *stablement orbitalement équivalentes* (resp. *isomorphes*) si  $X$  et  $X'$  contiennent des ouverts  $Y$  et  $Y'$  qui rencontrent toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  tels que les relations d'équivalence induites  $\mathcal{R}|_Y$  et  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  sont orbitalement équivalentes (resp. isomorphes).

## 2.4 Réalisation géométrique

La donnée d'un système fini de générateurs  $S$  de  $G$  fournit un système fini de générateurs  $\Sigma = \{\tau_g/g \in S\}$  de  $\Gamma$ . Par analogie avec l'action d'un groupe, l'orbite  $\Gamma(T) = \mathcal{R}[T]$  est l'ensemble des sommets d'un graphe  $\bar{\Gamma}(T) = \bar{\mathcal{R}}[T]$ , muni de la distance  $d_\Sigma$  définie par la longueur des  $\Sigma$ -mots. Nous dirons alors que  $(\mathcal{R}, \mathcal{T}, \Sigma)$  est une *relation d'équivalence graphée* et que  $(\Gamma, \mathcal{T}, \Sigma)$  un *pseudogroupe graphé*. Dans [8], le deuxième auteur a prouvé l'extension suivante du théorème 2.2.1:

**Théorème de réalisation géométrique 2.4.1.** *Soit  $\Gamma$  un pseudogroupe de génération compacte agissant sur un espace localement compact, métrisable et séparable  $X$  de dimension 0. Alors il existe lamination compacte par surfaces de Riemann  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$  dont le pseudogroupe de holonomie est équivalent à  $\Gamma$ .*

D'une part, si  $Y$  est un ouvert et fermé de  $X$  qui rencontre toutes les feuilles et si  $\Sigma$  est un système de génération compacte pour  $\Gamma|_Y$ , alors la fonction de valence  $val : Y \rightarrow \mathbb{N}$  est continue. Il existe donc un espace compact feuilleté par graphes  $(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$  tel que  $Y$  est un fermé qui rencontre toute les feuilles de  $\mathcal{F}$  et  $\Gamma|_Y$  est le pseudogroupe de holonomie de  $\mathcal{F}$  réduit à  $X$ . D'autre part, si  $(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$  un espace compact feuilleté par graphes transversalement modelé par un espace localement compact, métrisable et séparable de dimension 0, il existe une lamination compacte par surfaces de Riemann  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$  telle que les pseudogroupes de holonomie de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{L}$  réduits à l'ensemble de sommets  $Y$  sont égaux. En fait, comme nous l'ont fait remarquer B. Deroin et G. Hector, ce théorème d'épaissement reste valable en dimension topologique finie quelconque.

## 2.5 Graphes répétitifs et ensembles minimaux

Le but de ce paragraphe est de caractériser les ensembles minimaux de  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  et  $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$  en adaptant la *propriété d'isomorphisme local* des pavages [1, 9].

**Définition 2.5.2.** i) Fixons un couple  $T, T' \in \mathcal{T}$ . Nous dirons qu' $T'$  *contient une copie fidèle de la boule*  $B_T(x, r)$  et nous écrirons  $B_T(x, r) \hookrightarrow T'$  s'il existe  $g \in G$  tel que  $g.B_T(x, r) = B_{T'}(g.x, r) \subset T'$ .

ii) Nous dirons qu'un graphe  $T \in \mathcal{T}$  est *répétitif* si pour tout entier  $r > 0$ , il existe un entier  $R > 0$  tel que  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout couple  $x, y \in T$ .

Nous adaptons ici une version uniforme de la propriété d'isomorphisme local usuelle. En fait, pour les pavages de type fini, les deux propriétés sont équivalentes. L'analogue pour les graphes fait partie du critère de minimalité suivant (dont l'équivalence  $(ii) \Leftrightarrow (iii)$  a été prouvée dans [2, 4]):

**Théorème 2.5.3.** *Pour tout  $T \in \mathcal{T}$ , considérons l'ensemble fermé  $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$  saturé pour  $\mathcal{R}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) *le graphe  $T$  est répétitif;*
- ii) *pour tout  $r > 0$ , il existe  $R > 0$  tel que  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout  $y \in T$ ;*
- iii) *l'ensemble  $X$  est minimal.*

**Preuve.** Il suffit de prouver  $(iii) \Rightarrow (i)$ , mais il convient avant de rappeler brièvement  $(iii) \Rightarrow (ii)$ . Pour cela, à tout réel  $r > 0$ , on lui associe une suite croissante d'ouverts  $U_R = \{ T' \in X / B_T(e, r) \hookrightarrow B_{T'}(e, R) \}$  (avec  $R \geq 1$ ) qui recouvrent  $X$ . Puisque  $X$  est compact, il existe  $R > 0$  tel que  $X = U_R$ . Pour tout  $x \in T$ , le graphe  $x^{-1}.T \in U_R$  et donc  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_{x^{-1}.T}(e, R)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $g \in G$  tel que:  $g.B_T(e, r) = B_{x^{-1}.T}(g, r) \subset B_{x^{-1}.T}(e, R)$ . Alors on a:

$$h.B_T(e, r) = x.B_{x^{-1}.T}(g, r) = B_T(h, r) \subset x.B_{x^{-1}.T}(e, R) = B_T(x, R)$$

avec  $h = xg$  et  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_T(x, R)$ . Pour démontrer  $(iii) \Rightarrow (i)$ , fixons un réel  $r > 0$  et un point  $x \in T$ . Comme auparavant, l'ensemble  $X$  est recouvert par une suite croissante d'ouverts  $U_R^x = \{ T' \in X / B_T(x, r) \hookrightarrow B_{T'}(e, R) \}$  et il existe  $R > 0$ , qui dépend de  $r$  et  $x$ , tel que  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout  $y \in T$ . Pour conclure, il faut pouvoir choisir  $R > 0$  indépendant du point  $x$ . Remarquons tout d'abord que pour tout sommet  $g$  de  $\mathcal{G}$ , la boule  $B_{\mathcal{G}}(g, r) = g.B_{\mathcal{G}}(e, r)$ . Rappelons aussi que la compacité  $\mathcal{T}$  provient du fait que  $B_{\mathcal{G}}(e, r)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes. Il en est de même pour  $B_{\mathcal{G}}(g, r)$ . En fait, à translation près, il n'y a qu'un nombre fini de boules de rayon  $r > 0$  distinctes. Considérons une famille

finie de points  $x_1, \dots, x_n \in T$  de manière que les boules  $B_T(x_i, r)$  représentent toutes les classes de translations possibles. Pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $y \in T$ , on a  $B_T(x_i, r) \hookrightarrow B_T(y, R(r, x_i))$ . Si on pose  $R = \max\{R(r, x_1), \dots, R(r, x_n)\}$ , alors  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout couple  $x, y \in T$ .  $\square$

### 3 L'espace feuilleté de Ghys–Kenyon

Nous donnons ici une nouvelle construction de l'espace feuilleté de Ghys–Kenyon [4], que n'utilise pas l'arbre de Kenyon [4, 7], mais ses règles de construction.

#### 3.1 L'arbre de Kenyon et l'espace feuilleté de Ghys–Kenyon

Nous allons commencer par rappeler la construction de l'arbre de Kenyon. Soient  $\mathcal{Z}^2$  le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ , muni du système de générateurs  $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ , et  $T_1$  le sous-arbre de  $\mathcal{Z}^2$  décrit dans la figure 3.

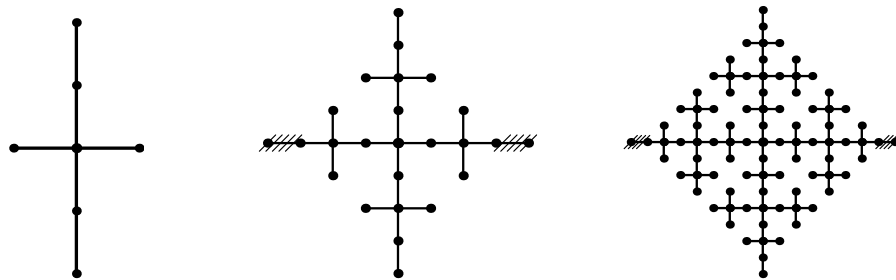


Figure 3: Les arbres  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$

Cet arbre est traduit ensuite par le vecteur  $(0, 2)$ , puis l'image est tournée à l'aide des rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . L'élagage des arêtes terminales contenues dans l'axe horizontal fournit un arbre  $T_2$ . Si on répète ce procédé, on obtient de même un arbre  $T_3$ . Par récurrence, on obtient une suite d'arbres  $T_n$  qui rencontrent les axes horizontal et vertical suivant les intervalles  $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$  et  $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$  respectivement. Nous appellerons *arbre de Kenyon* la réunion  $T_\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_n \subset \mathcal{Z}^2$ . C'est un arbre aperiodique et répétitif ayant 4 bouts.

Nous appellerons *minimal de Ghys–Kenyon* l'ensemble  $X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ . D'après le théorème 2.2.1, il existe un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$  d'un espace compact  $\mathbf{X}$  pour lequel  $X$  est une transversale complète et  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence induite par  $\mathcal{F}$ . Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys–Kenyon* ce minimal de l'espace feuilleté de Gromov–Hausdorff  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ . En fait, d'après le théorème 2.4.1, on peut remplacer  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$  par une vraie lamination par surfaces de Riemann  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$ , appelée *lamination de Ghys–Kenyon*.



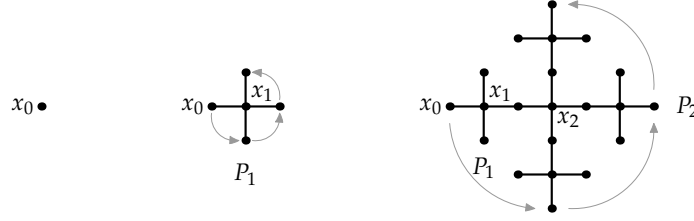


Figure 4: Construction de l'arbre  $\Phi(\alpha)$

### 3.2 Codage des feuilles

Nous allons reconstruire le minimal de Ghys–Kenyon à l'aide d'une application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow X$  qui, à toute suite  $\alpha = \alpha_0\alpha_1 \dots \in \mathcal{S}_4 = \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$ , associe un arbre apériodique et répétitif  $\Phi(\alpha)$  dans l'enveloppe de  $T_\infty$ . Nous construirons  $\Phi(\alpha)$  de proche en proche en partant du sommet  $x_0 = 0$  et de l'arbre trivial  $P_0 = \{0\}$ . Pour cela, nous commençons par identifier les éléments de  $\mathbb{Z}_4$  avec les racines quatrièmes de l'unité grâce à l'application  $\mathbf{r} : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\mathbf{r}(k) = e^{\frac{\pi}{2}ik}$ . Nous joignons les sommets  $x_0$  et  $x_1 = \mathbf{r}(\alpha_0)$  par une arête de  $\mathcal{Z}^2$ , puis nous prenons la réunion des images de cette arête par les rotations de centre  $x_1$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . Nous obtenons ainsi un arbre  $P_1 = \Phi(\alpha_0)$ . Considérons ensuite l'unique arête de  $\mathcal{Z}^2$  qui joint le sommet  $x_2 = x_1 + 2\mathbf{r}(\alpha_1)$  avec un sommet de  $P_1$ . Nous appelons  $P_2 = \Phi(\alpha_0\alpha_1)$  la réunion de l'arbre  $P_1$  et leurs images par les rotations de centre  $x_1$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . Par récurrence, nous avons une suite de sommets  $x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}\mathbf{r}(\alpha_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i\mathbf{r}(\alpha_i)$  et une suite croissante de sous-arbres finis  $P_n$  de  $\mathcal{Z}^2$ . Alors  $\Phi(\alpha) = \bigcup_{n \geq 0} P_n = \bigcup_{n \geq 0} \Phi(\alpha_0 \dots \alpha_{n-1})$  est un arbre apériodique et répétitif ayant au plus 2 bouts. Nous appellerons *squelette de  $\Phi(\alpha)$*  la suite de sommets  $x_0x_1 \dots x_n \dots$  identifiée au chemin d'arêtes obtenu en joignant les sommets  $x_n$  et  $x_{n+1}$  par  $2^n$  arêtes dans la direction  $\mathbf{r}(\alpha_i)$ . Nous venons de définir une application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{T}$ .

**Proposition 3.2.1.** *Le minimal de Ghys–Kenyon  $X$  est l'enveloppe  $\overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$  de tout arbre codé  $\Phi(\alpha)$ . Il se décompose en la réunion disjointe de la classe  $\mathcal{R}[T_\infty]$  et de l'ensemble saturé  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$ .*

**Preuve.** Vérifions d'abord que  $X = \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$  pour toute suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$ . En effet,  $T_\infty \in \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$  car  $B_{T_\infty}(0, 2^n - 1) = B_{\Phi(\alpha)}(x_n, 2^n - 1) - x_n = B_{\Phi(\alpha) - x_n}(0, 2^n - 1)$ . Donc  $X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]} \subset \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$ . Mais puisque  $\Phi(\alpha)$  est répétitif, on a l'égalité. Pour montrer la deuxième affirmation, on constate que les arbres  $T_\infty$  et  $\Phi(\alpha)$  sont distincts car ils n'ont pas le même nombre de bouts. Leurs classes d'équivalence  $\mathcal{R}[T_\infty]$  et  $\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$  le sont aussi. Il faut vérifier que tout arbre  $T \in X - \mathcal{R}[T_\infty]$  est équivalent à un arbre  $\Phi(\alpha)$ . En remplaçant  $T$  par un translaté  $T - v$ , nous pourrions supposer

que  $val(T) = val_T(0) = 1$ . Nous construirons alors de proche en proche une suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$  telle que  $T = \Phi(\alpha)$ . Psar hypothèse, la sphère  $S_T(0, 1) = \partial \overline{B}_T(0, 1)$  est réduite à un point  $x_1$  et  $\alpha_0 = \mathbf{r}^{-1}(x_1)$ . Supposons connus les codes  $\alpha_0 \dots \alpha_n$  et les points  $x_0 \dots x_n$  du squelette. Alors la sphère  $S_T(x_n, 2^n) = \partial \overline{B}_T(x_n, 2^n)$  vérifie l'une des deux conditions suivantes:

- i)  $S_T(x_n, 2^n)$  est réduite à un seul point  $x_{n+1} = x_n + 2^n v$  où  $v \in \mathbb{Z}^4$ . Dans ce cas, nous définirons  $\alpha_n = \mathbf{r}^{-1}(v)$ .
- ii)  $S_T(x_n, 2^n)$  contient deux points  $x_{n+1}^0$  et  $x_{n+1}^1$ . Dans ce cas, il existe  $i \in \{0, 1\}$  tel que  $B_T(x_{n+1}^i, 2^{n+2} - 1) = B_{T_\infty}(0, 2^{n+2} - 1)$  (voir la figure 5) et nous définirons  $x_{n+1} = x_{n+1}^{1-i} = x_n + 2^n v$  et  $\alpha_n = \mathbf{r}^{-1}(v)$  avec  $v \in \mathbb{Z}^4$ .

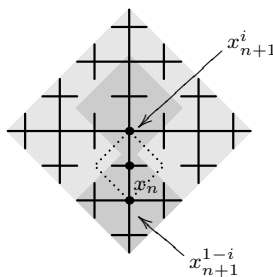


Figure 5: Le  $(n + 1)$ -ième code

Par récurrence, nous aurons une suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$  telle que  $T = \Phi(\alpha)$ . □

Considérons l'ouvert-fermé  $X^{\leq 2} = \{T \in X / val(T) \leq 2\}$ , le  $G_\delta$  dense  $Y = X - \mathcal{R}[T_\infty] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$  et le borélien  $Y^{\leq 2} = Y \cap X^{\leq 2}$ . D'après la preuve de la proposition ci-dessus, l'application de codage  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  est surjective.

### 3.3 Relation cofinale

Si on munit  $\mathcal{S}_4 = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$  de la topologie produit, engendrée par les cylindres  $C_{\beta_0 \dots \beta_n}^{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \{\alpha \in \mathcal{S}_4 / \alpha_{i_0} = \beta_0, \dots, \alpha_{i_n} = \beta_n\}$ ,  $\mathcal{S}_4$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Soit  $\sigma : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}_4$  le déplacement de Bernoulli donné par  $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$  pour toute suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$  et tout entier  $n \geq 0$ . Deux suites  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathcal{S}_4$  sont *cofinales* s'il existe  $n \geq 0$  tel que  $\sigma^n(\alpha) = \sigma^n(\beta)$ , c'est-à-dire  $\alpha_m = \beta_m$  pour tout  $m \geq n$ . Pour tout couple de suites finies  $\alpha_0 \dots \alpha_n$  et  $\beta_0 \dots \beta_n$ , les arbres finis  $\Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n)$  et  $\Phi(\beta_0 \dots \beta_n)$  sont reliés par  $\Phi(\beta_0 \dots \beta_n) = \Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n) - v$  où le vecteur  $v = \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\alpha_i) - \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\beta_i) = \sum_{i=0}^n 2^i (\mathbf{r}(\alpha_i) - \mathbf{r}(\beta_i))$ . Un argument simple montre alors que:

**Proposition 3.3.1.** *Deux arbres codés  $\Phi(\alpha)$  et  $\Phi(\beta)$  sont  $\mathcal{R}$ -équivalents si et seulement si les suites  $\alpha$  et  $\beta$  sont cofinales.*

La remarque précédente montre aussi que  $\Phi$  est injective, ce qui nous donne:

**Proposition 3.3.2.** *L'application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  est une bijection*

Signalons que l'expansion binaire des éléments de  $\mathbb{Z}_4$  fournit un homéomorphisme entre  $\mathcal{S}_4 = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$  et  $\mathcal{S}_2 = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ , induit par les substitutions  $0 \rightarrow 00$ ,  $1 \rightarrow 10$ ,  $2 \rightarrow 01$  et  $3 \rightarrow 11$  obtenues en remplaçant  $k \in \mathbb{Z}_4$  par un couple d'éléments  $a(k)$  et  $b(k)$  de  $\mathbb{Z}_2$  tels que  $k = a(k) + 2b(k)$ . Évidemment les relations cofinales sur  $\mathcal{S}_4 = \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathcal{S}_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  deviennent isomorphes. Il y a d'ailleurs une équivalence orbitale entre la relation cofinale  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  sur  $\mathcal{S}_2$  et la relation d'équivalence engendrée par la transformation  $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  décrite dans l'introduction. Sauf les suites  $000\dots$  et  $111\dots$  qui appartiennent à une même orbite, les classes de cofinalité coïncident avec les orbites de  $T$ .

### 3.4 Dynamique borélienne

Empruntée de la théorie des pavages, la notion de *motif* est le bon outil pour décrire la  $\sigma$ -algèbre des boréliens de  $X$ . Tout sous-arbre fini  $P$  de  $\mathcal{Z}^2$  contenant l'origine sera appelé un *motif* de  $\mathcal{Z}^2$ . Nous dirons que  $T \in \mathcal{T}$  contient le motif  $P$  autour d'un sommet  $p$  si  $P + p \subset T$  et nous définirons  $X_{P,p} = \{T \in X/P + p \subset T\}$ . Si  $p = 0$ , nous écrirons simplement  $X_P$ . Comme pour les pavages [1], les ensembles  $X_P$  sont des ouverts-fermés de  $X$ . Néanmoins, les motifs ne suffisent pas pour engendrer la topologie de  $X$ . En effet, la boule  $B = \overline{B}_X(\Phi(00\dots), e^{-1})$  est l'ensemble des arbres  $T$  tels que  $\overline{B}_T(0, 1) = \overline{B}_{\Phi(00\dots)}(0, 1) = 0\bullet\text{---}\bullet$ , mais il n'y a aucun motif  $P$  tel que  $X_P \subset B$ . En fait,

$$B = X_{0\bullet\text{---}\bullet} - (X_{\bullet\downarrow_0} \cup X_{\bullet\text{---}\bullet_0} \cup X_{\bullet\downarrow_0}).$$

En général, pour tout arbre  $T \in X$  et tout entier  $r > 0$ , la boule  $\overline{B}_X(T, e^{-r})$  est l'ouvert-fermé  $X_{(P,A)}$  associé au motif fin  $(P, A)$  où  $P = \overline{B}_T(e, r)$  et  $A$  est l'ensemble des arêtes du graphe  $\overline{B}_{\mathcal{Z}^2}(e, r) - B_T(e, r - 1)$  qui rencontrent  $P$ . Par conséquent, les ouverts-fermés  $X_P$  engendrent la  $\sigma$ -algèbre des boréliens.

L'application de codage  $\Phi$  n'est pas continue, car  $\mathcal{S}_4$  est compact, mais  $Y^{\leq 2}$  ne l'est pas. Néanmoins,  $\Phi$  a deux propriétés importantes:

**Proposition 3.4.1.** *L'application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  est borélienne ouverte.*

**Preuve.** Pour tout motif  $P$ , l'ensemble  $\Phi^{-1}(X_P) = \bigcup_{\alpha_0\dots\alpha_n \in \mathcal{P}} C_{\alpha_0\dots\alpha_n}^{0\dots n}$  où  $\mathcal{P} = \{\alpha_0\dots\alpha_n/P \subset \Phi(\alpha_0\dots\alpha_n)\}$ . Par ailleurs, on a  $\Phi(C_{\alpha_0\dots\alpha_n}^{0\dots n}) = X_{\Phi(\alpha_0\dots\alpha_n)}$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant affirmer que la dynamique transverse borélienne de la lamination de Ghys-Kenyon est représentée par une machine à sommer binaire.

### 3.5 Propriétés ergodiques

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence mesurable discrète sur  $X$ , munie d'une mesure quasi-invariante ergodique  $\mu$ . Par analogie avec la classification des facteurs de F. J. Murray et J. von Neumann, on peut distinguer trois types de relations:

- 1) *Type I<sub>n</sub>* (avec  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ): si  $\mathcal{R}$  est transitive (avec cardinal  $\#X = n$ ).
- 2) *Type II<sub>n</sub>* (avec  $n = 1$  ou  $\infty$ ): si  $\mathcal{R}$  n'est pas transitive et si  $\mu$  est équivalente à une mesure (finie ou infinie) invariante pour  $\mathcal{R}$ .
- 3) *Type III*: s'il n'existe pas de mesure invariante équivalente à  $\mu$ .

Si  $\mu_4$  est la mesure de probabilité équilibrée sur  $\mathcal{S}_4$ , alors  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  est de type II<sub>1</sub>.

**Proposition 3.5.1.** *La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est de type II<sub>1</sub>.*

**Preuve.** Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $B_n$  la boule de centre  $T_\infty$  et de rayon  $n$  contenue dans  $\mathcal{R}[T_\infty]$ . L'isomorphisme entre  $\overline{\mathcal{R}}[T_\infty]$  et  $T_\infty$  identifie  $B_n$  avec  $B_{T_\infty}(0, n)$ . Soit  $\mu_n$  la mesure de comptage sur  $B_n$ . Pour tout motif  $P$ , on a:

$$\mu_n(X_P) = \frac{\#B_n \cap X_P}{\#B_n} = \frac{\#\{p \in B_{T_\infty}(0, n) / P + p \subset T_\infty\}}{\#B_{T_\infty}(0, n)} = \frac{A(P, n)}{V(n)}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\mu_n$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu$ . Puisque  $X_P$  est un ouvert-fermé, on a:

$$\mu(X_P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X_P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(P, n)}{V(n)} = \text{fréquence du motif } P.$$

D'autre part, pour tout sommet  $v \in P$ , l'ensemble  $X_P - v = X_{P-v}$  est l'image de  $X_P$  par la translation  $\tau_v(T) = T - v$ . Si  $T_\infty$  contient le motif  $P$  autour d'un point  $p \in B_{T_\infty}(0, n-r)$ , il contient aussi le motif  $P - v$  autour du point  $p+v \in B_{T_\infty}(0, n)$  avec  $r > \|v\|$ . Donc

$$|\mu_n(X_P - v) - \mu_n(X_P)| \leq \frac{V(n) - V(n-r)}{V(n)} \leq \frac{V(n+r) - V(n-r)}{V(n)}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Mais puisque la fonction  $V(n)$  est à croissance sous-exponentielle, il vient  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(X_P - v) - \mu_n(X_P)| = 0$  et donc  $\mu$  est invariante pour  $\mathcal{R}$ .  $\square$

**Proposition 3.5.2.** *L'application  $\Phi$  définit une équivalence orbitale stable entre les relations d'équivalence mesurées  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  sur  $\mathcal{S}_4$  et  $\mathcal{R}$  sur  $X$ .*

**Preuve.** Puisque le saturé de  $Y^{\leq 2}$  est de mesure totale, il nous suffit de démontrer que  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  envoie  $\mu_4$  sur une mesure équivalente à  $\mu|_{Y^{\leq 2}}$ . Par l'invariance de  $\mu$ , on a  $\mu(X^{\leq 2}) = \frac{3}{4}$  et donc  $\mu_{X^{\leq 2}} = \frac{4}{3}\mu|_{X^{\leq 2}}$  est une mesure de probabilité sur  $X^{\leq 2}$  invariante pour  $\mathcal{R}|_{X^{\leq 2}}$ . L'inverse de  $\Phi$  envoie la mesure induite par  $\mu_{X^{\leq 2}}$  sur une mesure de probabilité sur  $\mathcal{S}_4$  invariante pour  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$ . L'unicité ergodique de  $\mu_4$  entraîne que  $\Phi_*\mu_4 = \mu_{X^{\leq 2}}|_{Y^{\leq 2}}$ .  $\square$

**Théorème 3.5.3.** *La dynamique transverse mesurable de la lamination de Ghys-Kenyon  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$  est représentée par une machine à sommer binaire. En outre, elle est uniquement ergodique.*

Un très joli résultat d'É. Ghys [3] permet de parler du type topologique des feuilles génériques de  $\mathcal{L}$ . De notre cas, on a que:

- i) il y a un ensemble saturé résiduel et de mesure totale dont toutes les feuilles ont exactement un bout;*
- ii) il y a un ensemble saturé maigre et de mesure nulle constitué par une infinité non dénombrable des feuilles ayant deux bouts;*
- iii) il y a une seule feuille avec quatre bouts.*

Le point essentiel est de vérifier qu'il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des feuilles ayant deux bouts et l'ensemble des suites de  $\mathcal{S}_4$  contenant un nombre fini de détours et une infinité d'aller et retours. Pour toute suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$ , nous appelons *aller et retour* (resp. *détour*) tout couple  $\alpha_n \alpha_{n+1}$  avec  $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$  ayant la même (resp. distincte) parité. Cela permet de montrer que l'ensemble des feuilles à deux bouts est non dénombrable de mesure nulle. D'après le lemme 2.6 de [2], l'ensemble des feuilles ayant un bout est résiduel.

## 4 Dynamique topologique

Toutes les  $\mathcal{R}$ -classes du minimal de Ghys-Kenyon sont obtenues à partir des mêmes motifs par un même procédé d'inflation. Nous utiliserons l'inclusion de ces motifs dans les motifs qui résultent de l'inflation pour décrire sa dynamique topologique.

### 4.1 Relations d'équivalence affables

Une relation d'équivalence  $\beta$ -discrète  $\mathcal{R}$  sur un espace localement compact séparé  $X$  est dite *compacte* [5] si  $\mathcal{R} - \Delta$  est compact où  $\Delta$  est la diagonale de  $X \times X$ .

**Définition 4.1.1** ([5]). Une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie sur un espace totalement discontinu  $X$  est dite *affable* s'il existe une suite croissante de relations d'équivalence compactes  $\mathcal{R}_n$  telle que  $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ . Si on munit  $\mathcal{R}$  de la topologie limite inductive, alors  $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$  est une relation d'équivalence  $\beta$ -discrète *approximativement finie* (AF en abrégé).

Un *diagramme de Bratteli* est un graphe orienté  $\mathcal{B} = (V, E)$  dont les ensembles de sommets et d'arêtes admettent des décompositions  $V = \bigsqcup_{n \geq 0} V_n$  et  $E = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n$  où  $V_n$  et  $E_n$  sont des ensembles finis non vides tels que pour toute arête  $e \in E_n$ , l'origine  $\alpha(e) \in V_n$  et l'extrémité  $\beta(e) \in V_{n+1}$  [5]. On appelle *source* tout sommet

$v$  tel que  $\beta^{-1}(v) = \emptyset$ . Soit  $X_{\mathcal{B}}$  l'espace des chemins infinis  $e_n e_{n+1} e_{n+2} \dots$  (avec  $\alpha(e_{i+1}) = \beta(e_i)$ ) issus d'une source  $\alpha(e_n)$  de  $\mathcal{B}$ . La relation d'équivalence *cofinal*  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  sur  $X_{\mathcal{B}}$  (qui identifie  $e_n e_{n+1} \dots$  et  $e'_m e'_{m+1} \dots$  s'il existe  $N \geq m, n$  tel que  $e'_i = e_i$  pour tout  $i \geq N$ ) est affable. En fait, d'après [5], toute relation d'équivalence AF sur  $X$  est isomorphe à la relation cofinale  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  sur  $X_{\mathcal{B}}$  définie par un diagramme de Bratteli  $\mathcal{B}$ .

## 4.2 Affabilité du minimal de Ghys-Kenyon

Soit  $\mathcal{P}_n = \{A_n^0, A_n^1, A_n^2, A_n^3, B_n^0, B_n^1, C_n\}$  la famille de *motifs basiques de taille  $n$*  définis par  $A_n^k = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n - 1) \cup e_n^k$ ,  $B_n^k = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n - 1) \cup e_n^k \cup e_n^{k+2}$  et  $C_n = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n)$  où  $e_n^k$  est l'arête qui relie  $(2^n - 1)\mathbf{r}(k)$  et  $2^n \mathbf{r}(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}_4$  (voir la figure 6). Deux éléments  $T$  et  $T'$  de  $X - X_{C_n}$  sont  $\mathcal{R}_n$ -équivalents s'il existe un motif basique  $P \in \mathcal{P}_n - \{C_n\}$  et deux sommets  $v, v' \in P$  avec  $\|v\|, \|v'\| < 2^n$  tels que  $P \subset T - v = T' - v'$ . D'autre part, la relation  $\mathcal{R}_n$  est triviale sur  $X_{C_n}$ .

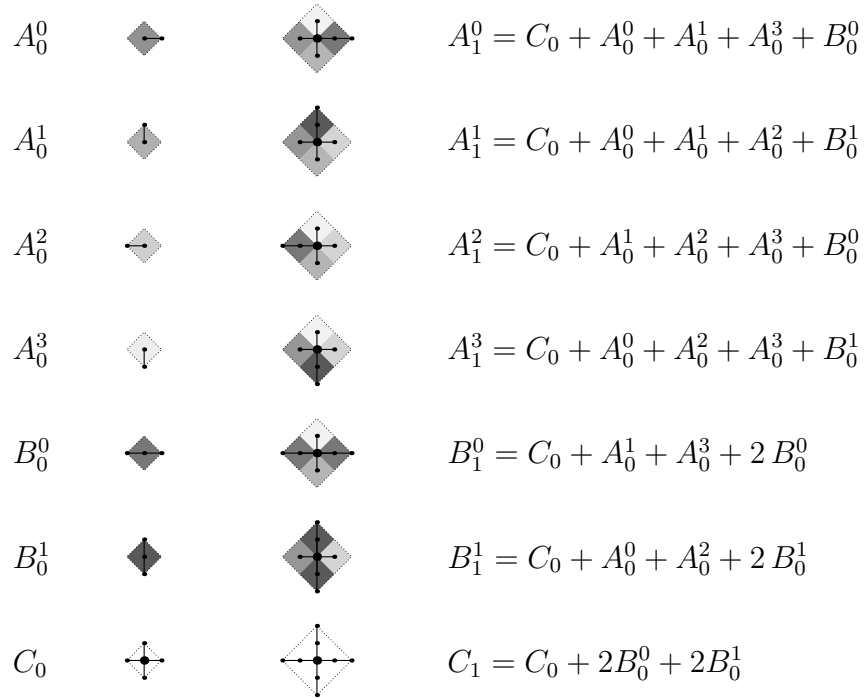


Figure 6: Les familles  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  et les règles d'inflation

**Proposition 4.2.1.** *Les relations d'équivalence  $\mathcal{R}_n$  sont compactes et ouvertes dans  $\mathcal{R}$  et donc  $\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$  est affable et ouverte dans  $\mathcal{R}$ .*

**Preuve.** Montrons que  $\mathcal{R}_n$  est ouverte dans  $\mathcal{R}$ . Pour tout couple  $(T, T') \in \mathcal{R}_n$ , il existe un motif  $P \in \mathcal{P}_n$  et deux sommets  $v, v' \in P$  avec  $\|v\|, \|v'\| < 2^n$  tels que  $P \subset T - v = T' - v'$ . Choisissons  $N > 0$  tel que  $P + v \subseteq B_T(0, N)$ , puis considérons l'ouvert  $U = \{T'' \in X/B_{T''}(0, N) = B_T(0, N)\}$  de  $X$  et l'ouvert  $O(U, w)$  de  $\mathcal{R}$  où  $w = v - v'$ . Pour tout  $T'' \in U$ , le couple  $(T'', T'' - w) \in \mathcal{R}_n$  car  $T''$  contient le motif  $P$  autour de  $v$ . Donc  $(T, T') \in O(U, v) \subset \mathcal{R}_n$ . Alors  $\mathcal{R}_n$  est la réunion des ouverts  $O(U, w)$  associés motifs  $P \in \mathcal{P}_n$  et aux sommets  $v, v' \in P$  tels que  $\|v\|, \|v'\| < 2^n$ . En remplaçant  $U$  par l'ouvert-fermé  $X_{P,v}$  et  $O(U, w)$  par le graphe de la translation  $T'' \mapsto T'' - w$  définie sur  $X_{P,v}$ , nous aurons que  $\mathcal{R}_n$  est compacte.  $\square$

Toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_\infty$  sont égales, sauf celle de  $T_\infty$  qui se décompose en la réunion de la classe triviale  $\{T_\infty\}$  et de quatre classes isomorphes aux composantes connexes de  $T_\infty - \{0\}$ . La dynamique topologique de  $\mathcal{R}_\infty$  est représentée par le diagramme de Bratteli  $\mathcal{B} = (V, E)$  où  $V_0 = \{0\}$ ,  $V_{n+1} = \mathcal{P}_n = \{A_n^0, A_n^1, A_n^2, A_n^3, B_n^0, B_n^1, C_n\}$  et  $P \in \mathcal{P}_n$  est relié par une arête de  $E_{n+1}$  à  $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$  si et seulement si  $Q$  contient une copie fidèle de  $P$ . L'isomorphisme  $\Psi : X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$  entre  $\mathcal{R}_\infty$  et  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  est donné par  $\Psi(T) = (e_0, e_1, \dots)$  où  $\beta(e_n)$  est l'unique motif  $P \in \mathcal{P}_{n+1}$  pour lequel  $T - v$  appartient à l'ouvert-fermé  $X_{(P,A)}$  avec  $v \in P$  et  $A$  formé des arêtes de  $\overline{B_{T_\infty}}(0, 2^{n+1})$  qui n'appartiennent pas à  $P$ . Pour tout  $T \in X$  avec  $val(T) = 4$ , l'origine 0 est l'intersection des translatés de quatre motifs basiques de taille  $n$ . Nous modifierons alors  $\mathcal{R}_n$  pour que 0 devienne équivalent aux autres points du translaté de  $A_n^0$  ou de  $B_n^0$ . Nous obtiendrons ainsi une suite de relations d'équivalence compactes  $\mathcal{R}'_n \supset \mathcal{R}_n$ . Alors  $\mathcal{R}'_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}'_n$  est affable. Puisque les bouts de la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $T_\infty$  sont partout denses,  $\mathcal{R}[T_\infty]$  se décompose en la réunion de quatre orbites denses et donc  $\mathcal{R}'_\infty$  est minimale. Nous pouvons maintenant appliquer le corollaire 4.17 de [5]:

**Théorème 4.2.2.** *La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est affable et la dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon est représentée par un système dynamique minimal sur l'ensemble de Cantor.*

## Références

- [1] J. Bellissard, R. Benedetti, J.M. Gambaudo. Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labeling. *Comm. Math. Phys.*, **261** (2006), 1-41.
- [2] E. Blanc. *Propriétés génériques des laminations*, Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [3] E. Ghys. Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.*, **141** (1995), 387-422.
- [4] E. Ghys. Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Syntheses*, **8** (1999), 49-95.

- [5] T. Giordano, I. F. Putnam, C. F. Skau. Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24** (2004), 441-475.
- [6] A. Haefliger. Pseudogroups of local isometries, in *Differential Geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, Research Notes in Math. 131, Pitman, Boston, 1985, 174-197.
- [7] R. Kenyon. A group of paths in  $\mathbb{R}^2$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** (1996), 3155-3172.
- [8] A. Lozano Rojo. *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tesis Doctoral UPV-EHU, 2008.
- [9] C. Radin, M. Wolff. Space tilings and local isomorphism. *Geom. Dedicata*, **42** (1992), 355-360.